

Cours 6 : Equations linéaires non-homogènes Equations homogènes à coefficients constants

Nous utilisons maintenant les résultats obtenus pour

$$(H) \quad x' = A(t)x$$

afin d'étudier

$$(NH) \quad x' = A(t)x + f(t),$$

où $A \in C^0(a, b), \mathbb{R}^{n \times n}$, $f \in C^0(a, b), \mathbb{R}^n$ ($-\infty \leq a < b \leq \infty$).

Une différence importante entre (H) et (NH) est que le principe de superposition n'est pas valable pour (NH) :

$$x_1(t), x_2(t) \text{ sols. de (NH)} \not\Rightarrow x_1(t) + x_2(t) \text{ sol. de (NH)}$$

Le lemme suivant donne la structure de l'ensemble des solutions de (NH) .

Lemme 6.1 : (a) $x_1(t), x_2(t)$ sols. de $(NH) \Rightarrow x_1(t) - x_2(t)$ sol. de (H) .

(b) $x_1(t)$ sol. de (NH) , $x_2(t)$ sol. de $(H) \Rightarrow x_1(t) + x_2(t)$ sol. de (NH) .

(c) Soit $X(t)$ une matrice fondamentale de (H) et $x_1(t)$ une solution de (NH) . Alors $x(t)$ est solution de (NH) ssi il existe $c \in \mathbb{R}^n$ t.q. $x(t) = X(t)c + x_1(t)$.

Preuve : (a) & (b) sont triviaux (par substitution).

(c) $\Leftarrow$ est aussi trivial par substitution.

$\Rightarrow$ découle de la proposition 5.2 (c) et du point (a).

En effet, par (a), si $x(t)$ est solution de (NH) , alors $x(t) - x_1(t)$ est solution de (H) . Alors, par la prop. 5.2 (c), il existe $c \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$x(t) - x_1(t) = X(t)c. \quad \#$$

Le lemme 6.1 dit que la solution générale de (NH) a la structure suivante :

$$\text{sol. générale } (NH) = \text{sol. générale } (H) + \text{sol. part. } (NH)$$

Connaissant une matrice fondamentale de (H) , il suffit donc pour résoudre (NH) de trouver une solution

particulière de (NH) . Plus précisément, on a le résultat suivant.

Théorème 6.1 (variation des constantes)

Soit $X(t)$ une matrice fondamentale de (H) et $t_0 \in (a, b)$.

(a) La solution générale de (NH) est

$$(6.1) \quad x(t) = X(t)c + \int_{t_0}^t X(t)X^{-1}(s)f(s)ds, \quad c \in \mathbb{R}^n.$$

(b) La solution (unique) de (NH) avec $\text{CI } x(t_0) = x_0$ est

$$(6.2) \quad x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t X(t)X^{-1}(s)f(s)ds.$$

Preuve: (a) Soit $x(t)$ sol. de (NH) . Cherchons $u(t)$

t.q. $x(t) = X(t)u(t)$, i.e. $u(t) = X(t)^{-1}x(t)$.
En dérivant, il vient

$$\begin{aligned}x'(t) &= X'(t)u(t) + X(t)u'(t) = A(t)X(t)u(t) + X(t)u'(t) \\ &= A(t)x(t) + X(t)u'(t).\end{aligned}$$

Comme $x(t)$ satisfait (NH), on déduit que

$$f(t) = x'(t) - A(t)x(t) = X(t)u'(t)$$

$$u'(t) = X^{-1}(t)f(t), \quad u(t) = c + \int_{t_0}^t X^{-1}(s)f(s)ds.$$

(b) En injectant (a) et $x(t_0) = x_0$ dans (6.1),
on obtient

$$x_0 = X(t_0)c, \quad c = X(t_0)^{-1}x_0,$$

d'où (6.2). #

Bien que fournissant un outil très efficace pour résoudre des équations non-homogènes en général, remarquons qu'une solution particulière de (NH) peut souvent être obtenue de manière plus directe.

Exemple 6.1 : Considérons l'équation d'ordre 2

(6.3)

$$y'' - 4y' + 3y = 2t$$

cf. axes

La solution générale de l'équation homogène $y'' - 4y' + 3y = 0$ est $y_h(t) = C_1 e^t + C_2 e^{3t}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

La solution générale de (6.3) aura donc la forme

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{3t} + y_p(t),$$

où $y_p(t)$ est une solution particulière de (6.3) à déterminer. Une possibilité est d'appliquer le théorème 6.1. On écrit l'EDO d'ordre 2 sous la forme d'un système d'ordre 1 : $x_1 = y$, $x_2 = y' \Rightarrow$

$$(6.4) \quad \begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = 3x_1 - 4x_2 + 2t. \end{cases}$$

Comme annoncé ci-dessus, $\begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} e^{3t} \\ 3e^{3t} \end{pmatrix}$ sont deux solutions linéairement indépendantes du système homogène associé

$$(6.5) \quad \begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = 3x_1 - 4x_2. \end{cases}$$

Ainsi,

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{3t} \\ e^t & 3e^{3t} \end{pmatrix}$$

est une matrice fondamentale de (6.5), avec wronskien

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^t & e^{3t} \\ e^t & 3e^{3t} \end{vmatrix} = 3e^{4t} - e^{4t} = 2e^{4t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Par le théorème 6.1, la solution générale de (6.4) est donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}(t) = X(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + X(t) \int_0^t X^{-1}(s) \begin{pmatrix} 0 \\ f(s) \end{pmatrix} ds.$$

Par calcul,

$$X^{-1}(s) = \frac{1}{2e^{4s}} \begin{pmatrix} 3e^{3s} & -e^{3s} \\ -e^s & e^s \end{pmatrix} \quad \hookrightarrow$$

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} (t) &= \begin{pmatrix} e^t & e^{3t} \\ e^t & 3e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t & e^{3t} \\ e^t & 3e^{3t} \end{pmatrix} \int_0^t \frac{1}{2e^{4s}} \begin{pmatrix} 3e^{3s} & -e^{3s} \\ -e^s & e^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2s \end{pmatrix} ds \\
 &= \begin{pmatrix} C_1 e^t + C_2 e^{3t} \\ C_1 e^t + 3C_2 e^{3t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t & e^{3t} \\ e^t & 3e^{3t} \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} -se^{-s} \\ se^{-3s} \end{pmatrix} ds = \dots
 \end{aligned}$$

Une approche plus directe est fournie par la méthode des coefficients indéterminés : essayons

$$y_p(t) = \alpha t + \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ à déterminer}$$

$$\text{Alors } y_p'' - 4y_p' + 3y_p = 2t \quad \text{donne} \quad -4\alpha + 3(\alpha t + \beta) = 2t$$

$$(3\alpha - 2)t + 3\beta - 4\alpha = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \alpha = \frac{2}{3} \quad \beta = \frac{8}{9}$$

$$\hookrightarrow y_p(t) = \frac{2}{3}t + \frac{8}{9}.$$

Equations homogène à coefficients constants

Nous étudions maintenant plus en détail l'équation

$$(H-c) \quad x' = Ax,$$

où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice constante. Par le théorème 5.1, toutes les solutions de (H-c) sont définies sur $\mathbb{R}$. Le lemme suivant donne deux propriétés importantes des solutions de (H-c) qui ne sont pas vraies en général pour (H).

Lemme 6.2 : (a) Si $x(t)$ est solution de (H-c), alors $x^{(k)}(t)$ existe et est solution de (H-c), pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(b) Si $x(t)$ est solution de $(H-c)$, alors $x(t+\tau)$ est solution de $(H-c)$, pour tout $\tau \in \mathbb{R}$.

Preuve: (a) se prouve aisément par récurrence.
(b) est trivial. #

Nous allons maintenant complètement caractériser l'ensemble des solutions de $(H-c)$. Nous nous inspirons du cas $n=1$: la solution général de $x' = a x$ est $x(t) = c e^{at}$, $c \in \mathbb{R}$. Cherchons une solution de $(H-c)$, dans le cas général, sous la forme $x(t) = e^{at} \varphi$, $\varphi \in \mathbb{R}^n$. Par substitution, on obtient

$$\lambda e^{\lambda t} \varphi = A e^{\lambda t} \varphi, \quad A \varphi = \lambda \varphi.$$

On obtient donc une solution si φ est vecteur propre de A , correspondant à la valeur propre λ .

Supposons que A possède n valeurs propres (réelles) distinctes $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$. Alors les vecteurs propres correspondant $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ sont lin. indép. et les solutions

$$x_i(t) = e^{\lambda_i t} \varphi_i, \quad i=1, \dots, n,$$

engendrent l'espace vectoriel des solutions de (H-C).

Exemple 6.2 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

possède trois valeurs propres distinctes :

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$$

avec les vecteurs propres correspondants

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La solution générale de $x' = Ax$ est donc

$$x(t) = c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Si la matrice A n'a pas toutes ses valeurs propres distinctes et réelles, il est utile de

plonger $(H-c)$ dans $\mathbb{C}$:

$$(H-cc) \quad z' = A z, \quad z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n,$$

où l'on interprète maintenant $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ comme un élément de $\mathbb{C}^{n \times n}$. Comme A est réelle, si $z: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ est solution de $(H-cc)$, alors $\operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(z)$ sont deux solutions réelles de $(H-c)$ et $\bar{z}$ est aussi solution de $(H-cc)$. De nouveau, $z(t) = e^{\lambda t} \varphi$ est solution si λ est valeur propre de A et φ est un vecteur propre correspondant. Si A a n valeurs propres distinctes ou, plus

généralement, si A a n vecteurs propres lin. indep.
alors la solution générale est entièrement déterminée.

Exemple 6.3

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ a pour valeurs propres i et $-i$,
avec vecteurs propres correspondants $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix}$.
Donc la solution générale de (H-cc) est

$$\begin{aligned} z(t) &= z_1 e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + z_2 e^{-it} \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix}, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}. \\ &= z_1 \begin{pmatrix} \cos t + i \sin t \\ i \cos t - \sin t \end{pmatrix} + z_2 \begin{pmatrix} -\cos t + i \sin t \\ i \cos t + \sin t \end{pmatrix} \\ &= z_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + i z_1 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + z_2 \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + i z_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Choisissons $z_1 = c_1 \in \mathbb{R}$ et $z_2 = -i c_2 \in i\mathbb{R}$, on déduit que

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

est la solution (réelle) générale de $(H-c)$.

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a la valeur propre double $\lambda = 1$, avec vecteurs propres $\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\varphi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, la solution générale de $(H-c)$ est

$$x(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^t \\ c_2 e^t \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ n'a que deux valeurs propres distinctes, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$,

avec vecteurs propres $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (par exemple).
Leur correspondent les deux solutions lin. indép.

$$e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'équation $(H-c)$ n'a ici que deux solutions linéairement indépendantes de la forme $e^{\lambda t} \varphi$.
Le problème est alors de trouver une troisième solution lin. indép. afin de déterminer la solution générale.